Examen d'automatique

Master 1 Électronique et télécommunications
Durée : 2h

17 avril 2007

Petits exercices

Exercice 1 (variables d'état)

Soit le système de représentation d'état

$$\begin{cases} \begin{matrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{matrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

1. Étudier la commandabilité et l'observabilité du système.
2. Donner l'expression dans le domaine de Laplace de la sortie Y(p) en fonction de l'entrée U(p) et de l'état initial $[x_1(0) \quad x_2(0)]^T$ (simplifiez les expressions au maximum). En déduire la fonction de transfert du système $\frac{Y(p)}{U(p)}$.
3. Calculer pour une entrée nulle l'évolution temporelle de la sortie du système à partir de t=0, pour l'état initial $[x_1(0) \quad x_2(0)]^T = [1 \quad 1]^T$.

Exercice 2 (temps discret)

Soit le système d'équation récurrente

$$y(n) = \frac{1}{2}(3y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 0.5x(n-1))$$

1. Donner la fonction de transfert $\frac{Y(z)}{X(z)}$ du système.
2. Calculer les pôles de cette fonction de transfert, le système est il stable (justifier) ?
3. Calculer l'expression temporelle $y(t)$ de la réponse du système à une impulsion unité.

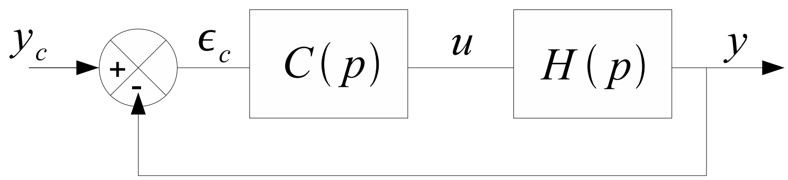

FIG. 1 – Asservissement à temps continu

Problème 1 : Asservissement numérique d'une MCC

On se propose d'asservir la position angulaire d'une machine à courant continu. On note θ la position angulaire du rotor en radians. On note $\omega = \dot{\theta}$ sa vitesse angulaire en radians/s. On suppose que la fonction de transfert liant la tension de commande à la vitesse angulaire de la MCC et bien modélisée par une fonction de transfert du premier ordre $\frac{1}{p+a}$. De plus, la position est liée à la vitesse angulaire par une intégration. La fonction de transfert globale du système à commander est donc $H(p) = \frac{1}{p(p+a)}$.

Correcteur à temps continu

Pour améliorer les performances du système on utilise un correcteur à avance de phase de la forme $C(p) = k\frac{p+a}{p+b}$ insérer dans un boucle de rétroaction figure 1.

1. Calculer b et k de manière à donner en boucle fermée un second ordre de la forme

$$\frac{K}{p^2/\omega_0^2 + 2mp/\omega_0 + 1}$$

avec un coefficient d'amortissement m de 1 et une fréquence de résonance ω_0 de 1.

Synthèse de la commande par transformée bilinéaire

On remplace C(p) par un ensemble 'CAN+calculateur+CNA' échantillonné à la période T.

2. En utilisant la transformée bilinéaire, calculer la fonction de transfert $K(z)$ du correcteur numérique permettant de remplacer le correcteur à temps continu précédent.

Stabilité du système corrigé

3. Remplacer le système à commander $H(p)$ par son équivalent temps discret $G(z)$ en supposant que le CNA est un bloqueur d'ordre zero.

4. En déduire la fonction de transfert en boucle fermée du système à temps discret corrigé par commande numérique.

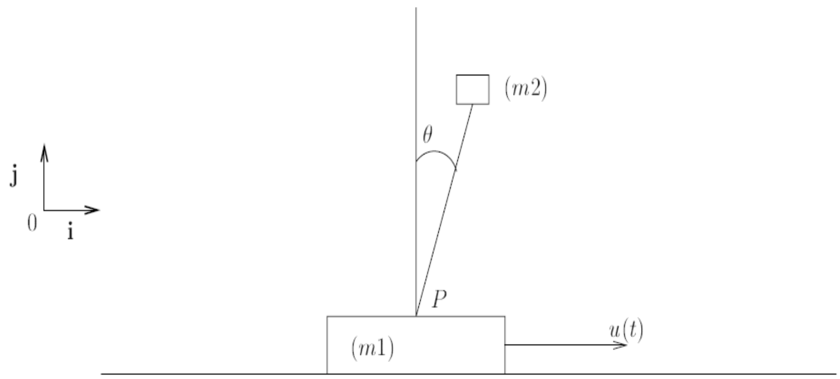

FIG. 2 – Schéma du pendule

Problème 2 : Pendule inversé

On considère un chariot homogène de masse $m1$ se déplaçant le long d'un axe $(0, \vec{i})$; On fixe une barre au point P (voir figure 2) : la liaison en P est parfaite. On suppose en outre que la barre, de longueur l et de masse négligeable, est assujettie à ne se déplacer que sur l'axe $(0, \vec{i})$. Une masselotte $m2$ est fixée à l'extrémité de la barre. Enfin, on appelle $u(t)\vec{i}$ la force extérieure qui est exercée sur le chariot. On note $y(t)$ l'abcisse du point P du chariot et $\theta(t)$ l'angle orienté que fait la barre par rapport à l'axe $(0, \vec{j})$. L'objectif du problème est de stabiliser la barre au voisinage de sa position verticale $\theta = 0$ en n'agissant que sur le chariot par la force $u(t)$.

Modélisation

L'application des lois de la dynamique, linéarisées au voisinage de la position verticale $\theta = 0$ conduit aux équations suivantes :

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\ddot{\theta} - u(t) = 0$$

$$\ddot{y} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0$$

où g est l'accélération de la pesanteur.
1. Exprimer $\ddot{y}$ en fonction de $u(t)$, θ et des constantes du système.
2. Exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de $u(t)$, θ et des constantes du système.
3. En déduire la représentation d'état (A, B, C) du système ayant pour entrée u, pour vecteur d'état $x = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ et pour sortie θ.

Propriétés du système

4. Calculer les pôles du système ainsi modélisé. Celui-ci est-il stable(justifier) ?
5. Calculer la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B)$ du système (multiplier itérativement A par B, AB etc... pour éviter de calculer les puissances de A). Montrer que le système est commandable (on pourra permuter les colonnes de cette matrice et montrer que le déterminant de la matrice obtenue est non nul en développant par rapport à la première colonne).

Retour d'état

Comme le système est commandable, on stabilise le système par un retour d'état de la forme. $u = v - Fx$ où v est la consigne d'entrée.
6. Donner la nouvelle représentation d'état du système bouclé. En vue d'appliquer la formule d'Ackermann, calculer les 4 coefficients du vecteur ν, dernière ligne de l'inverse de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A,B)$ par la résolution du système linéaire

$$\nu\mathcal{C}(A,B) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

7. Pour les valeurs numériques $m_1 = 1Kg$, $m_2 = 1Kg$, $l = 1m$, $g = 10m/s^{-2}$ utiliser la formule d'Ackermann pour déterminer une matrice de retour d'état F qui impose une unique constante de temps $\tau = 1s$ à tous les pôles du système bouclé.

Formulaire

COMMANDE NUMERIQUE

- Transformée bilinéaire avec T période d'échantillonnage :

$$w = 2/T\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- Équivalent à temps discret du système à temps continu H(p)+ Bloqueur d'ordre 0 : $G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(p)}{p}\right]$

VARIABLES D'ETAT

- Équation de retour d'état (u entrée en boucle ouverte, v entrée en boucle fermée, x vecteur d'état)

$$u = v - Fx$$

- Formule d'Ackermann pour les retours d'état (ν dernière ligne de $\mathcal{C}(A,B)^{-1}$, P_d polynôme désiré)

$$F = \nu P_d(A)$$